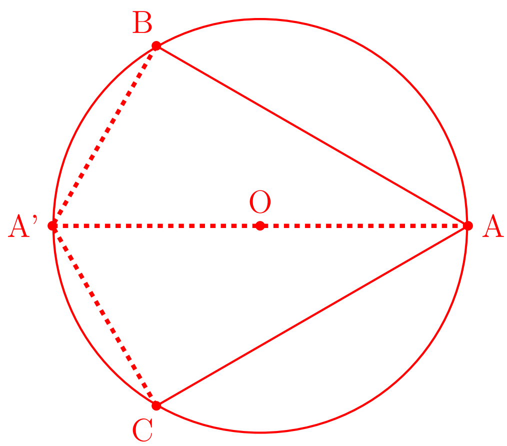
I. Cas du triangle équilatéral



ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

On cherche à calculer le produit des longueurs des deux cordes [AB] et [AC].

Notons A' le symétrique de A par rapport à O.
$\mathrm{AA'} = 2$.

Montrons que BOA' est donc un triangle équilatéral :
Le triangle ABA' est rectangle en B car [AA'] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

ABC est un triangle équilatéral, donc $\widehat{\mathrm{BAC}} = 60°$, donc $\widehat{\mathrm{BAA'}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{BAC}} = 30°$.

Ainsi $\widehat{\mathrm{BA'A}} = 180 - 90 - 30 = 60°$.
BOA' est donc un triangle isocèle ($\mathrm{OB} = \mathrm{OA'} = 1$) ayant un angle de 60° : c'est un triangle équilatéral, de côté 1.

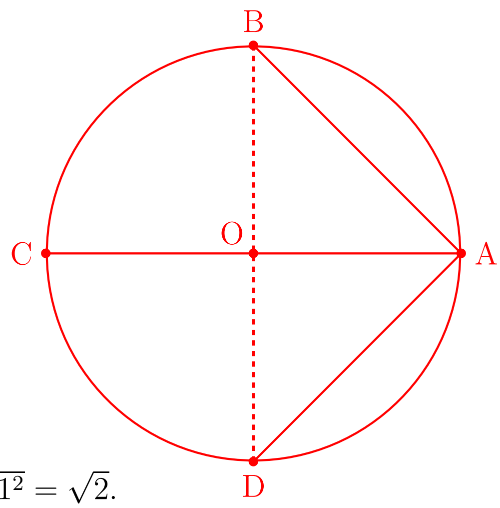
On en déduit que $\mathrm{BA'} = 1$.

Calculons la longueur AB :
Le triangle ABA' est rectangle en B, $\mathrm{AA'} = 2$ et $\mathrm{BA'} = 1$.
D'après le théorème de Pythagore, $\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AA'}^2 - \mathrm{BA'}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Conclusion :
Ainsi le produit des **deux** cordes vaut

$$p = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3.$$

II. Cas du carré



ABCD est un carré inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

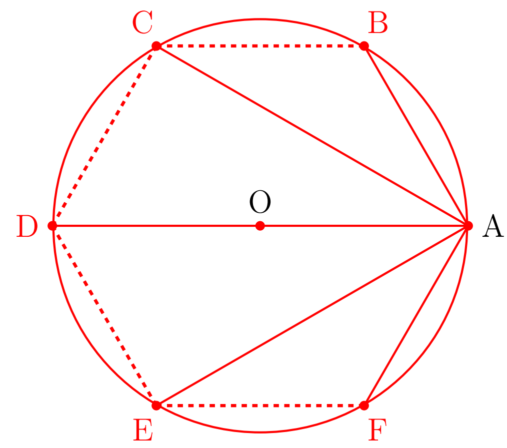
On cherche à calculer le produit des longueurs des trois cordes [AB], [AC] et [AD].

$\mathrm{AC} = 2$.
ABO est un triangle isocèle de côtés $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$.

ABO est rectangle en O, donc $\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Ainsi le produit des **trois** cordes vaut

$$p = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \mathrm{AD} = \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4.$$

III. Cas de l'hexagone régulier



ABCD est un carré inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

On cherche à calculer le produit des longueurs des cinq cordes [AB], [AC], [AD], [AE] et [AF].

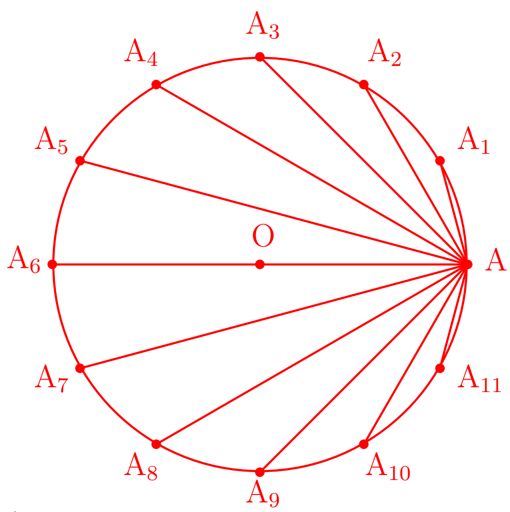
$\mathrm{AD} = 2$.

ABO est un triangle équilatéral de côté 1 car il est isocèle en O et $\widehat{\mathrm{AOB}} = 60°$.
Donc $\mathrm{AB} = 1$.
De même $\mathrm{CD} = 1$.

ACD est rectangle en C, donc $\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 - \mathrm{CD}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.
Ainsi le produit des **cinq** cordes vaut

$$p = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \mathrm{AD} \times \mathrm{AE} \times \mathrm{AD} = 1 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} \times 1 = 6.$$

IV. Cas du dodécagone régulier



$\mathrm{AA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}}$ est un dodécagone régulier inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

On obtient
$\mathrm{AA_1} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (par exemple avec le théorème d'Al-Kashi)
$\mathrm{AA_2} = 1$
$\mathrm{AA_3} = \sqrt{2}$
$\mathrm{AA_4} = \sqrt{3}$
$\mathrm{AA_5} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ (par exemple avec le théorème de Pythagore à partir de la valeur de $\mathrm{AA_1}$)
$\mathrm{AA_6} = 2$
On calcule le produit des longueurs des **onze** cordes issues de A :

$$p = \sqrt{2 - \sqrt{3}}^2 \times 1^2 \times \sqrt{2}^2 \times \sqrt{3}^2 \times \sqrt{2 + \sqrt{3}}^2 \times 2 = 12.$$

V. Cas général

On démontre en fait que, pour tout n-gone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1, le produit des $n - 1$ cordes, obtenues comme dans les exemples précédents, est égal à n.

N'est-ce pas un résultat merveilleux ?!

Je joue à un jeu avec un ami. Nous avons devant nous un sac de billes qui contient des billes.
Chacun notre tour, nous pouvons prendre 1, 2 ou 3 de ces billes.
Le gagnant est celui qui prend la (ou les) dernière(s) bille(s).

Si je commence, combien dois-je prendre de billes pour être sûr de gagner, même si mon adversaire est malin ?

I. Niveau 1 : avec 10 billes

1. Réfléchissons à l'envers

Si j'arrive à obliger mon adversaire à prendre la 7^{e}, la 8^{e} ou la 9^{e} bille, alors je gagnerai en prenant 3, 2, ou 1 bille.
En fait il faudrait que j'arrive à prendre la 6^{e} bille.
Donc il faudrait que j'arrive à obliger mon adversaire à prendre la 3^{e}, la 4^{e} ou la 5^{e} bille : en effet, il me suffirait alors de prendre la 6^{e} bille en prenant 3, 2, ou 1 bille.
Je me rends compte que c'est ce qui va arriver si je commence par prendre **deux** billes.

2. Jouons à l'endroit

mon tour (il reste 10 billes dans le sac) : je prends 2 billes ;

son tour (il reste 8 billes dans le sac) : il prend 1, 2 ou 3 billes ;

mon tour (il reste 7 ou 6 ou 5 billes dans le sac) : je prends le « complément à 4 » du nombre de billes qu'il vient de prendre : s'il en prend 1, j'en prends 3, s'il en prend 2, j'en prends 2, et s'il en prend 3, j'en prends 1 : dans tous les cas, à nous deux, on aura pris 4 billes dans le sac ;

son tour (il reste 4 billes dans le sac) : il prend 1, 2 ou 3 billes ;

mon tour (il reste 3 ou 2 ou 1 billes dans le sac) : j'ai gagné puisque je peux prendre 1, 2 ou 3 billes dans le sac.

II. Niveau 2 : avec 21 billes

1. Réfléchissons à l'envers

Si j'arrive à obliger mon adversaire à prendre la 18^{e}, la 19^{e} ou la 20^{e} bille, alors je gagnerai en prenant 3, 2, ou 1 bille. En fait il faudrait que j'arrive à prendre la 17^{e} bille.
Donc il faudrait que j'arrive à obliger mon adversaire à prendre la 14^{e}, la 15^{e} ou la 16^{e} bille : en effet, il me suffirait alors de prendre la 17^{e} bille en prenant 3, 2, ou 1 bille.
En fait il faudrait que j'arrive à prendre la 13^{e} bille.
En continuant le raisonnement, il faudrait que j'arrive à prendre la 9^{e} bille, la 5^{e} bille. . ., la 1re bille.
Ce dernier nombre (1), est le reste de la division euclidienne de 21 par 4 : $21 = 5 \times 4 + 1$.
Je me rends compte que je peux gagner à tous les coups si je commence par prendre **une** bille.

2. Jouons à l'endroit

mon tour (il reste 21 billes dans le sac) : je prends 1 bille ;

son tour (il reste 20 billes dans le sac) : il prend 1, 2 ou 3 billes ;

mon tour (il reste 17 ou 18 ou 19 billes dans le sac) : je prends le « complément à 4 » du nombre de billes qu'il vient de prendre : s'il en prend 1, j'en prends 3, s'il en prend 2, j'en prends 2, et s'il en prend 3, j'en prends 1 : dans tous les cas, à nous deux, on aura pris 4 billes dans le sac ;

son tour (il reste 16 billes dans le sac) : il prend 1, 2 ou 3 billes ;

mon tour (il reste 13 ou 14 ou 15 billes dans le sac) : je prends le « complément à 4 » du nombre de billes qu'il vient de prendre ;

...

son tour (il reste 4 billes dans le sac) : il prend 1, 2 ou 3 billes ;

mon tour (il reste 3 ou 2 ou 1 billes dans le sac) : j'ai gagné puisque je peux prendre 1, 2 ou 3 billes dans le sac.

III. Niveau 3 : avec 2015 billes

1. Réfléchissons à l'envers

Si j'arrive à obliger mon adversaire à prendre la 2012^{e}, la 2013^{e} ou la 2014^{e} bille, alors je gagnerai en prenant 3, 2, ou 1 bille.
En fait il faudrait que j'arrive à prendre la 2011^{e} bille.
Donc il faudrait que j'arrive à obliger mon adversaire à prendre la 2008^{e}, la 2009^{e} ou la 2010^{e} bille : en effet il me suffirait alors de prendre la 2011^{e} bille en prenant 3, 2, ou 1 bille.
En fait il faudrait que j'arrive à prendre la 2007^{e} bille.
En continuant le raisonnement, il faudrait que j'arrive à prendre la 2003^{e} bille, la 1999^{e} bille...
Comme $2015 = 503 \times 4 + 3$, il faudrait que j'arrive à prendre la 3^{e} bille.
Je me rends compte que c'est ce qui va arriver si je commence par prendre **trois** billes.

2. Jouons à l'endroit

mon tour (il reste 2015 billes dans le sac) : je prends 3 billes ;

son tour (il reste 2012 billes dans le sac) : il prend 1, 2 ou 3 billes ;

mon tour (il reste 2011, 2010 ou 2009 billes dans le sac) : je prends le « complément à 4 » du nombre de billes qu'il vient de prendre : s'il en prend 1, j'en prends 3, s'il en prend 2, j'en prends 2, et s'il en prend 3, j'en prends 1 : dans tous les cas, à nous deux, on aura pris 4 billes dans le sac ;

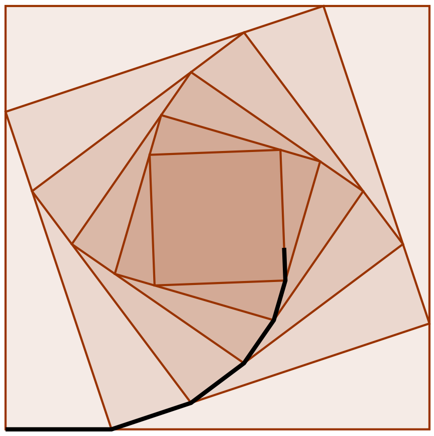
son tour (il reste 2008 billes dans le sac) : il prend 1, 2 ou 3 billes ;

mon tour (il reste 2007, 2006 ou 2005 billes dans le sac) : je prends le « complément à 4 » du nombre de billes qu'il vient de prendre ;

...

son tour (il reste 4 billes dans le sac) : il prend 1, 2 ou 3 billes ;

mon tour (il reste 3 ou 2 ou 1 billes dans le sac) : j'ai gagné puisque je peux prendre 1, 2 ou 3 billes dans le sac.



I. Avec 6 carrés, à la règle

À la règle, la spirale fait environ 14,4 cm (un peu plus que la longueur du côté du premier carré).

II. Avec 10 carrés, par le calcul

Le premier carré, $A_1B_1C_1D_1$, a pour côté 16.

On cherche le côté du deuxième carré, $A_2B_2C_2D_2$.

$A_1A_2 = \frac{1}{4} \times 16 = 4$ et $A_2B_1 = \frac{3}{4} \times 16 = 12$.

$A_2B_1B_2$ est rectangle en B_1 donc $A_2B_2 = \sqrt{A_2B_1^2 + B_1B_2^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

On cherche le côté du troisième carré, $A_3B_3C_3D_3$.

$A_2A_3 = \frac{1}{4} \times 4\sqrt{10} = \sqrt{10}$ et $A_3B_2 = \frac{3}{4} \times 4\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$.

De même que précédemment, $A_3B_3 = \sqrt{\sqrt{10}^2 + \left(3\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{10 + 90} = \sqrt{100} = 10$.

On cherche le côté des carrés suivants.

Chaque carré est une réduction du précédent, toujours selon le même facteur : pour passer d'un carré au suivant il faut multiplier son côté par $\sqrt{10}$ et le diviser par 4.

Les segments qui composent la spirale ont une longueur qui vaut le quart des côtés des carrés, on a donc les valeurs suivantes :

Carré	Côté	Longueur
1	A_1A_2	4
2	A_2A_3	$\sqrt{10}$
3	A_3A_4	$\sqrt{10} \times \sqrt{10}/4 = 10/4$
4	A_4A_5	$10/4 \times \sqrt{10}/4 = 10/16 \times \sqrt{10}$
5	A_5A_6	$10/64 \times 10 = 100/64 = 10^2/4^3$
6	A_6A_7	$10^2/4^4 \times \sqrt{10}$
7	A_7A_8	$10^2/4^5 \times 10 = 10^3/4^5$
8	A_8A_9	$10^3/4^6 \times \sqrt{10}$
9	A_9A_{10}	$10^3/4^7 \times 10 = 10^4/4^7$
10	$A_{10}A_{11}$	$10^4/4^8 \times \sqrt{10}$

Ainsi, la longueur de cette spirale est :

$$4 + \sqrt{10} + \frac{10}{4} + \frac{10}{16} \times \sqrt{10} + \frac{10^2}{4^3} + \frac{10^2}{4^4} \times \sqrt{10} + \frac{10^3}{4^5} + \frac{10^3}{4^6} \times \sqrt{10} + \frac{10^4}{4^7} + \frac{10^4}{4^8} \times \sqrt{10}$$
$$= \left(4 + \frac{10}{4} + \frac{10^2}{4^3} + \frac{10^3}{4^5} + \frac{10^4}{4^7}\right) + \left(1 + \frac{10}{4^2} + \frac{10^2}{4^4} + \frac{10^3}{4^6} + \frac{10^4}{4^8}\right)\sqrt{10}$$
$$= \frac{9881}{1024} + \frac{9881}{4096} \times \sqrt{10}.$$

On peut vérifier ce résultat l'aide d'un tableur :

	A	B
1	Carré	Côté
2	1	4
3	2	3.1622776602
4	3	2.5
5	4	1.9764235376
6	5	1.5625
7	6	1.235264711
8	7	0.9765625
9	8	0.7720404444
10	9	0.6103515625
11	10	0.4825252777
12		
13	Longueur totale :	17.2779456934

	A	B
1	Carré	Côté
2	1	4
3	=A2+1	=B2*RACINE(10)/4
4	=A3+1	=B3*RACINE(10)/4
5	=A4+1	=B4*RACINE(10)/4
6	=A5+1	=B5*RACINE(10)/4
7	=A6+1	=B6*RACINE(10)/4
8	=A7+1	=B7*RACINE(10)/4
9	=A8+1	=B8*RACINE(10)/4
10	=A9+1	=B9*RACINE(10)/4
11	=A10+1	=B10*RACINE(10)/4
12		
13	Longueur totale :	=SOMME(B2:B11)

On a bien $\dfrac{9881}{1024} + \dfrac{9881}{4096} \times \sqrt{10} \simeq 17{,}28$.

III. Avec 100 carrés, par le calcul

Notons (u_n) la suite des côtés des carrés.

On a démontré dans la partie précédente que cette suite était géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ et de premier terme $u_1 = 4$.
Ainsi la longueur de la spirale construite avec 100 carrés est $l_{100} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{100}$.
Ceci est une somme de termes d'une suite géométrique et $l_{100} = \dfrac{u_1 - u_{101}}{1-q}$.

Or $u_{101} = u_1 \times q^{101-1} = 4 \times \left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^{100} = \dfrac{10^{50}}{4^{99}}$.

Donc $l_{100} = \dfrac{4 - \dfrac{10^{50}}{4^{99}}}{1 - \frac{\sqrt{10}}{4}}$.
On trouve que $l_{100} \simeq 19{,}1$.

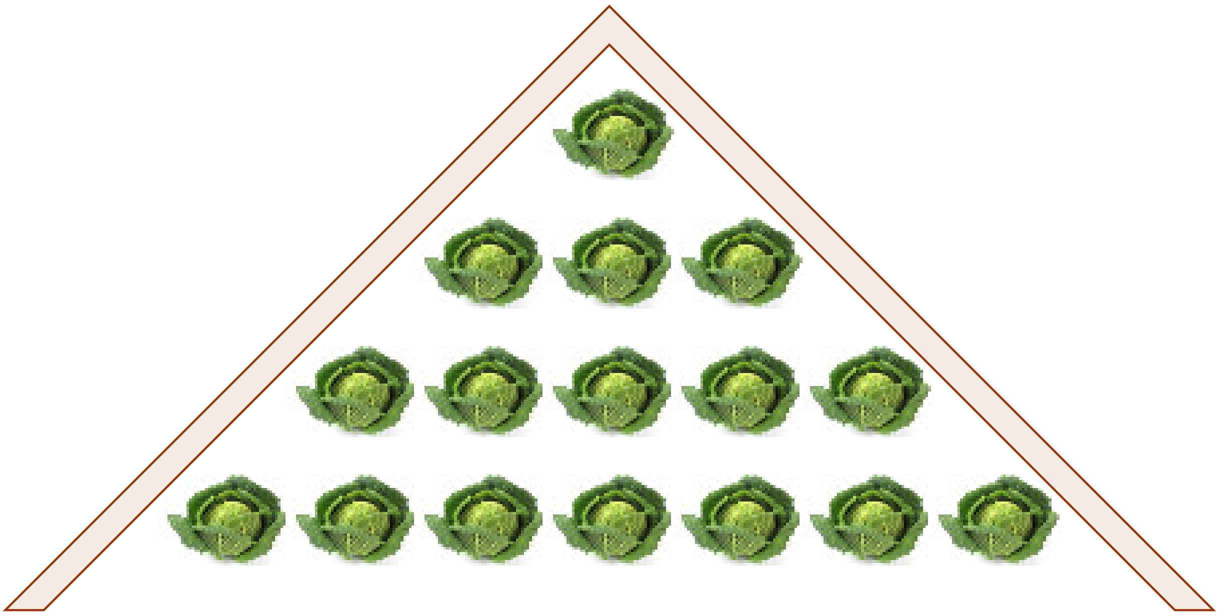
IV. Avec n carrés

Avec exactement le même raisonnement, on démontre que $l_n = \dfrac{u_1 - u_{n+1}}{1-q}$.
Or, pour n très grand, u_{n+1} (le côté du $n+1^{\text{e}}$ carré) est très proche de 0.
Donc $l_n \simeq \dfrac{u_1}{1-q}$.
Ainsi $l_n \simeq \dfrac{4}{1 - \frac{\sqrt{10}}{4}}$.
Après simplification, on obtient $l_n \simeq \dfrac{16}{4 - \sqrt{10}}$, soit encore $l_n \simeq 19{,}09940709$ à 10^{-8} près.

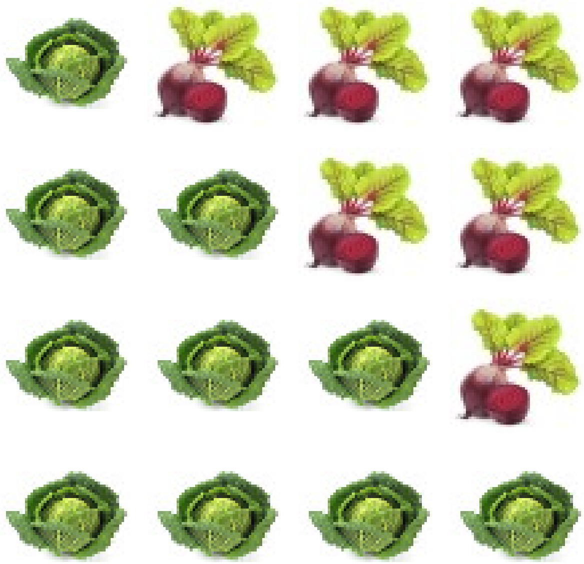
En fait, on dit que la limite de la suite l_n est égale à $\dfrac{16}{4-\sqrt{10}}$: c'est la longueur totale de la spirale (composée d'une infinité de segments !).

Niveau 1

Il y a $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100=10^2$.
Ayo a raison, Fémi aurait pu mettre faire un carré de 10×10 choux.



Niveau 2



Il y a $1+2+3+4+\cdots+19+20=210$ choux.
Il y a $1+2+3+4+\cdots+19=190$ betteraves.

Niveau 3

Notons (u_n) le nombre de choux sur la n^{e} ligne.
$u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $u_4 = 7$, ..., $u_n = 2n - 1$.
En fait cette suite est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_1 = 1$.
Ainsi, sur la 229$^{\text{e}}$ rangée il y a $u_{229} = 2 \times 229 - 1 = 457$ choux.
De plus, le nombre total de choux plantés dans les 229 rangées est

$$C_{229} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{229}.$$

Ceci est une somme de termes d'une suite arithmétique donc

$$C_{229} = 229 \times \frac{u_1 + u_{229}}{2}.$$

Ainsi,

$$C_{229} = 229 \times \frac{1 + 457}{2} = 229^2 = 52441.$$

Il y a 52 441 choux dans le potager de Fèmi.

Remarquons qu'en prolongeant ce raisonnement, on peut montrer que la somme des n premiers nombres impairs est égal au carré de n, donc que le potager de Fèmi pourra toujours être réarrangé en carré !